

## PRINCIPIOS VARIACIONALES PARAMETRIZADOS PARA ELASTICIDAD MICROPOLAR

C.A. FELIPPA

*Department of Aerospace Engng. Sciences  
& Center for Space Structures and Controls,  
University of Colorado, Boulder,  
Colorado 80309-0429, U.S.A.*

### RESUMEN

Se presenta un principio variacional parametrizado de seis campos para elasticidad lineal micropolar. Los campos independientes son tensiones simétricas y antisimétricas, deformaciones simétricas y antisimétricas, rotaciones micropolares y desplazamientos. El funcional del principio se caracteriza por seis parámetros libres. Se examina la conexión entre esta formulación y los funcionales con relajación de simetría de tensiones propuestas por Reissner y Hughes-Brezzi para elasticidad convencional. Se demuestra que los funcionales de Hughes-Brezzi son casos especiales del funcional parametrizado, pero los funcionales de Reissner no lo son. Los funcionales de Hughes-Brezzi pueden interpretarse como una regularización (estabilización consistente) de los funcionales de Reissner que coloca a éstos dentro del marco de elasticidad micropolar.

### SUMMARY

A parametrized six-field variational principle for micropolar compressible linear elasticity is presented. The primary variables are symmetric and skew stresses, symmetric and skew strains, micropolar rotations, and displacements. The governing functional is characterized by six free parameters. The connection between this formulation and the functionals with relaxed stress symmetry and independent rotations fields proposed by Reissner and Hughes-Brezzi for conventional linear elasticity is examined. It is shown that the Hughes-Brezzi functionals are special cases of the parametrized functional whereas the Reissner functionals are not. The former may be interpreted as a regularization (consistent stabilization) of the Reissner functionals that places them within the framework of micropolar elasticity.

### ECUACIONES FUNDAMENTALES

Consideramos un cuerpo compresible linealmente elástico y micropolar\* que ocupa el volumen  $V$ . El cuerpo está delimitado por la superficie  $S$  con normal  $n_i$  positiva

Recibido: Enero 1992

\* Un cuerpo micropolar es un modelo matemático de un continuo en el que no se cumplen las condiciones de simetría de los tensores de tensiones y deformaciones. La pérdida de simetría se debe a la presencia de momentos volumétricos cuyo efecto en las ecuaciones de equilibrio de momento angular es del mismo orden que las acciones de superficie.

exterior. La superficie se descompone de acuerdo con las condiciones de frontera en  $S : S_d \cup S_t$ . Los desplazamientos se especifican sobre  $S_d$  mientras que las fuerzas de superficie se especifican sobre  $S_t$ . Se usarán exclusivamente coordenadas cartesianas rectangulares.

Los cuatro campos volumétricos desconocidos son: el vector de desplazamientos  $u_i$ , el tensor de deformaciones infinitesimales  $\gamma_{ij}$ , el tensor de tensiones  $\tau_{ij}$ , y el tensor antisimétrico de microrrotaciones  $\theta_{ij}$ . Los tensores de deformaciones y tensiones no son simétricos. Las componentes simétricas y antisimétricas del tensor de tensiones son  $\sigma_{ij}$  y  $s_{ij}$ , respectivamente. Las componentes simétricas y antisimétricas del tensor de deformaciones son  $e_{ij}$  y  $\phi_{ij}$ , respectivamente. El tensor antisimétrico de rotaciones infinitesimales es  $\omega_{ij}$ . Los datos del problema incluyen: fuerzas volumétricas  $b_i$  en  $V$ , momentos volumétricos  $c_i$  en  $V$ , desplazamientos  $\hat{d}_i$  especificados en  $S_d$  y fuerzas de superficie  $\hat{t}_i$  especificadas en  $S_t$ .

Las ecuaciones algebraicas y diferenciales de campo que gobiernan el comportamiento de un continuo micropolar *isótropo* sin "tensiones de momento" (couple stresses) se escriben siguiendo Novacki<sup>1</sup> con varios cambios notacionales. En las ecuaciones siguientes,  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker,  $\epsilon_{ijk}$  es el símbolo de permutación ( $\epsilon_{ijk} = +1$  or  $-1$  si  $i, j, k$  son diferentes y forman una permutación positiva o negativa, respectivamente, de 1, 2, 3; de otro modo  $\epsilon_{ijk} = 0$ ),  $\lambda$  y  $\mu$  son los coeficientes de Lamé, y  $\kappa$  es un módulo micropolar que relaciona los tensores antisimétricos  $\phi_{ij}$  y  $s_{ij}$ . En adición, una coma denota derivada parcial con respecto a la coordenada espacial cuyo índice sigue a la coma.

Ecuaciones de deformación-desplazamiento y rotación-desplazamiento en  $V$ :

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= u_{j,i} - \theta_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} - \theta_{ij} = e_{ij} + \phi_{ij}, \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}), \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}(\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \\ \phi_{ij} &= \frac{1}{2}(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}) = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) - \theta_{ij} = \omega_{ij} - \theta_{ij}.\end{aligned}\tag{1}$$

Ecuaciones constitutivas en  $V$ :

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= (\mu + \kappa)\gamma_{ij} + (\mu - \kappa)\gamma_{ji} + \lambda\delta_{ij}\gamma_{kk} = \sigma_{ij} + s_{ij}, \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{2}(\tau_{ij} + \tau_{ji}) = 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{kk}, \\ s_{ij} &= \frac{1}{2}(\tau_{ij} - \tau_{ji}) = 2\kappa\phi_{ij}.\end{aligned}\tag{2}$$

Ecuaciones de equilibrio en  $V$ :

$$\begin{aligned}\tau_{ji,j} + b_i &= \sigma_{ji,j} + s_{ji,j} + b_i = 0, \\ \epsilon_{ijk}\tau_{jk} + c_i &= 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Fuerzas de superficie en  $S_t$ :

$$\tau_{ij}n_j = \hat{t}_i.\tag{4}$$

Desplazamientos de frontera en  $S_d$ :

$$u_i = \hat{d}_i. \quad (5)$$

Estas ecuaciones son aplicables si la presencia de tensiones de momento (couple stresses)  $m_{ij}$  se ignora. Si éstas se consideran, las ecuaciones constitutivas deben aumentarse con una relación entre  $m_{ij}$  y las derivadas del vector de microrrotaciones, y la segunda ecuación de equilibrio recibe un término de divergencia:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \mu_1 \delta_{ij} \theta_{k,k} + \mu_2 \theta_{i,j} + \mu_3 \theta_{j,i}, \\ m_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \tau_{jk} + \rho c_i &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

en los que  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$  son coeficientes constitutivos con dimensiones de fuerza. La presencia de tensiones de momento (couple stresses) complicaría seriamente las derivaciones que siguen sin mayor ganancia en practicidad pues dichos efectos son raramente considerados a nivel macroscópico; véase por ejemplo Berglund<sup>2</sup>. En consecuencia no serán incluidos en esta investigación.

Para completar y facilitar correlación con otras referencias, las ecuaciones (1)–(5) se describen abajo en notación tensorial directa (libre de índices):

$$\underline{\gamma} = \nabla \underline{u} - \underline{\theta} = \underline{e} + \underline{\omega} - \underline{\theta} = \underline{e} + \underline{\phi},$$

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^T) \underline{u} = \text{skew}(\nabla \underline{u}),$$

$$\underline{e} = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T) \underline{u} = \text{symm}(\nabla \underline{u}) = \text{symm} \underline{\gamma},$$

$$\underline{\phi} = \underline{\omega} - \underline{\theta} = \frac{1}{2}(\nabla - \nabla^T) \underline{u} - \underline{\theta} = \text{skew}(\nabla \underline{u} - \underline{\theta}) = \text{skew} \underline{\gamma},$$

$$\underline{\tau} = (\mu + \kappa) \underline{\gamma} + (\mu - \kappa) \underline{\gamma}^T + \lambda \mathbf{I} \text{trace } \underline{\gamma} = \underline{\sigma} + \underline{s},$$

$$\underline{\sigma} = \text{symm} \underline{\tau} = 2\mu \underline{e} + \lambda \mathbf{I} \text{trace } \underline{\gamma},$$

$$\underline{s} = \text{skew} \underline{\tau} = 2\kappa \underline{\phi},$$

$$\text{div } \underline{\tau} + \underline{b} = \text{div}(\underline{\sigma} + \underline{s}) + \underline{b} = \underline{0},$$

$$2 \text{axial } \underline{\tau} + \underline{c} = \underline{0},$$

$$\tau_n = \hat{t} \quad \text{sobre } S_t,$$

$$\underline{u} = \hat{\underline{d}} \quad \text{sobre } S_d.$$

en  $V$

(7)

Aquí un símbolo en **negrita subrayado** denota un tensor de orden dos o mayor. Se usa esta convención para distinguir tensores de las representaciones matriciales introducidas en la sección siguiente. Esta convención no es necesaria para vectores como  $\underline{u}$ .

## NOTACION

### Notación Matricial

Para facilitar la construcción y manipulación de expresiones matricial variacionales, tensiones y deformaciones se arreglarán como vectores columna contruidos con los componentes tensoriales apropiados. Las reglas de ordenación varían de acuerdo al tipo de simetría o antisimetría, y se ilustran mejor con ejemplos específicos.

Para la parte simétrica de tensiones y deformaciones:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \underline{e} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \equiv e = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

en donde  $\sigma_{31} = \sigma_{13}$  y  $e_{31} = e_{13}$ . El factor de 2 en  $e$  mantiene equivalencia de productos escalar tensión-deformación; véase la ecuación (12) abajo.

Para la parte antisimétrica de tensiones y deformaciones:

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ -s_{12} & 0 & s_{23} \\ -s_{13} & -s_{23} & 0 \end{bmatrix} \equiv s = \begin{Bmatrix} s_{23} \\ s_{31} \\ s_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\phi} = \begin{bmatrix} 0 & \phi_{12} & \phi_{13} \\ -\phi_{12} & 0 & \phi_{23} \\ -\phi_{13} & -\phi_{23} & 0 \end{bmatrix} \equiv \phi = \begin{Bmatrix} 2\phi_{23} \\ 2\phi_{31} \\ 2\phi_{12} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_{12} & \theta_{13} \\ -\theta_{12} & 0 & \theta_{23} \\ -\theta_{13} & -\theta_{23} & 0 \end{bmatrix} \equiv \theta = \begin{Bmatrix} 2\theta_{23} \\ 2\theta_{31} \\ 2\theta_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \equiv \omega = \begin{Bmatrix} 2\omega_{23} \\ 2\omega_{31} \\ 2\omega_{12} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

donde  $s_{31} = -s_{13}$  y  $\phi_{31} = -\phi_{13}$ . El factor de 2 se aplica a los tensores cinemáticos y nuevamente mantiene la equivalencia de productos internos; véase (12) abajo.

Para tensores generales (no simétricos) se usará

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{13} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Con estas convenciones, las operaciones entre tensores compatibles se traducen fácilmente al esquema matricial. Por ejemplo, los productos escalares

$$\underline{\sigma} : \underline{\epsilon} = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}, \quad \underline{s} : \underline{\phi} = s_{ij} \phi_{ij} = \mathbf{s}^T \boldsymbol{\phi}. \quad (12)$$

Sin embargo los problemas aparecen cuando se combinan tipos diferentes. Por ejemplo,  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{s}$  es una operación matricial inconsistente porque los vectores  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{s}$  tienen dimensiones diferentes. Este problema se elimina introduciendo versiones "expandidas" en las que componentes de tensores simétricos y antisimétricos se arreglan como si fueran tensores generales:

$${}^*\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad {}^*\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{23} \\ s_{31} \\ s_{12} \\ -s_{23} \\ -s_{31} \\ -s_{12} \end{Bmatrix}, \quad {}^*\mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \end{Bmatrix}, \quad {}^*\boldsymbol{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{23} \\ \phi_{31} \\ \phi_{12} \\ -\phi_{23} \\ -\phi_{31} \\ -\phi_{12} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Es de notarse que como  $\boldsymbol{\tau} \equiv {}^*\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\gamma} \equiv {}^*\boldsymbol{\gamma}$ , la distinción no es necesaria en este caso. Esta convención permite expandir consistentemente expresiones comunes como el producto escalar completo de tensiones y deformaciones:

$$\tau_{ij} \gamma_{ij} = \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\gamma} = ({}^*\boldsymbol{\sigma} + {}^*\mathbf{s})^T ({}^*\mathbf{e} + {}^*\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} + \mathbf{s}^T \boldsymbol{\phi}. \quad (14)$$

### Forma Matricial de las Ecuaciones de Campo

Usando la notación presentada en la subsección anterior, las ecuaciones de campo (1)–(3) pueden escribirse en el esquema matricial como sigue.

Ecuaciones ligando deformaciones y desplazamientos:

$$\gamma = {}^*e + {}^*\phi, \quad e = Du, \quad \phi = \omega - \theta = Ru - \theta. \quad (15)$$

Ecuaciones constitutivas:

$$\tau = {}^*\sigma + {}^*s, \quad \sigma = Ee, \quad s = G\phi. \quad (16)$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$D^T \sigma + R^T s + b = 0, \quad 2s + c = 0. \quad (17)$$

En estas ecuaciones,

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -\partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & -\partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & -\partial/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

son los operadores gradiente-simétrico y rotor, respectivamente, en forma matricial, y

$$E = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \lambda + 2\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad G = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

En las secciones siguientes  $E$  y  $G$  no se restringen a estas formas isotrópicas pero se les permite ser matrices simétricas *arbitrarias y no singulares*. Esta generalización permite anisotropía en las ecuaciones constitutivas, sujeta sin embargo a la restricción que los pares  $(\sigma, e)$  y  $(s, \gamma)$  permanezcan constitutivamente desacoplados.

Para uso futuro, introducimos la “matriz constitutiva”  $C$  que conecta tensiones y deformaciones totales:

$$\tau = C\gamma, \quad C = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}. \quad (20)$$

### Reducción a Elasticidad Clásica

La elasticidad micropolar se reduce a la elasticidad lineal clásica si el momento volumétrico  $c$  se anula. En este caso, la segunda ecuación de equilibrio  $2s + c = 0$  da  $s = 0$ , y el tensor  $\tau = \sigma + s = \sigma$  es simétrico. Asumiendo que  $G$  no es singular, la segunda ecuación constitutiva en (16) da  $\phi = G^{-1}s = 0$ , y el tensor  $\gamma = e + \phi = e$  es también simétrico. En adición,  $\theta = \omega$ , y por lo tanto microrrotaciones y rotaciones convencionales coinciden.

## Campos Dependientes e Independientes

En la investigación de métodos variacionales en secciones siguientes, se usará la notación de dependencia de campo usada por Felippa<sup>3,4</sup> y Felippa y Militello<sup>5,6</sup>. Un campo variado *independientemente* se identificará con un guiño superpuesto. Un campo *dependiente* se escribe usando el campo independiente generador como índice superior. Por ejemplo, si los desplazamientos varían independientemente, las tensiones y deformaciones simétricas que derivan de ellos se escriben

$$\mathbf{e}^u = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\sigma}^u = \mathbf{E}\mathbf{e}^u = \mathbf{E}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}. \quad (21)$$

Como resultado de estas convenciones, símbolos sin guiños como  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{e}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  se reservan para los campos *exactos* o para campos *genéricos*. Si un símbolo deriva de dos campos independientes ambos aparecen como índices superiores; por ejemplo  $\phi^{u\theta} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}$ .

## Abreviación de Integrales

Integrales de volumen y superficie pueden ser abreviadas poniendo paréntesis y corchetes, respectivamente, alrededor del integrando, con un índice que identifica el dominio de integración. Por ejemplo:

$$(f)_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f dV, \quad [f]_S \stackrel{\text{def}}{=} \int_S f dS, \quad [f]_{S_d} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_d} f dS, \quad [f]_{S_t} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{S_t} f dS. \quad (22)$$

Si  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son funciones vectoriales, y  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  funciones tensoriales, su producto interno sobre el volumen  $V$  se escribe de la manera usual

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V f_i g_i dV = \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{g} dV, \quad (\mathbf{p}, \mathbf{q})_V \stackrel{\text{def}}{=} \int_V p_{ij} q_{ij} dV = \int_V \mathbf{p}^T \mathbf{q} dV, \quad (23)$$

y similarmente para integrales de superficie, en cuyo caso se usarán corchetes.

## ENERGIA DE DEFORMACION GENERALIZADA PARA ELASTICIDAD CLASICA

El método usado en la construcción de principios variacionales parametrizados para elasticidad micropolar representa una generalización de los principios correspondientes de elasticidad lineal clásica, que se resumen en esta sección. Estos principios tienen la forma general

$$\Pi = U - P. \quad (24)$$

Aquí  $U$  identifica la energía de deformación generalizada, que caracteriza la energía almacenada en el cuerpo, y  $P$  es el potencial de esfuerzos, que caracteriza todas las otras contribuciones. La forma convencional de  $P$  es

$$P^c = (\mathbf{b}, \tilde{\mathbf{u}})_V + [\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{d}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n]_{S_d} + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t}. \quad (25)$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  la normal exterior unitaria en  $S$ . Otras dos formas de  $P$ , llamada  $P^d$  y  $P^t$  por “desplazamiento-generalizado” y “tracción-generalizada”,

respectivamente, han sido estudiadas por Felippa<sup>3-4</sup>. Estas formas son de interés para formulaciones de elementos finitos híbridos. En lo que sigue se enfoca la atención en  $U$  pues el potencial de esfuerzos no es afectado por la parametrización.

Para un material *compresible*, la energía de deformación generalizada introducida en Felippa y Militello<sup>5-7</sup> tiene la estructura

$$U = \frac{1}{2}j_{11}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^\sigma)_V + j_{12}(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{e}})_V + j_{13}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u)_V + \frac{1}{2}j_{22}(\sigma^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + j_{23}(\sigma^e, \mathbf{e}^u)_V + \frac{1}{2}j_{33}(\sigma^u, \mathbf{e}^u)_V, \quad (26)$$

donde  $j_{11}$  a  $j_{33}$  son coeficientes numéricos. Los tres campos independientes son tensiones  $\tilde{\sigma}$ , deformaciones  $\tilde{\mathbf{e}}$  y desplazamientos  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Usando la notación introducida previamente, los campos derivados que aparecen en (26) son

$$\sigma^e = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}, \quad \sigma^u = \mathbf{E}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{e}^\sigma = \mathbf{E}^{-1}\tilde{\sigma}, \quad \mathbf{e}^u = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}. \quad (27)$$

Por ejemplo, la  $U$  del funcional de Hu-Washizu's funcional se obtiene poniendo  $j_{12} = -1$ ,  $j_{13} = 1$ ,  $j_{22} = 1$ , otros cero, en (26)

$$U_H(\tilde{\sigma}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\sigma^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V + \frac{1}{2}(\sigma^u - \sigma^e, \mathbf{e}^\sigma)_V = \frac{1}{2}(\sigma^e, \tilde{\mathbf{e}})_V + (\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u - \tilde{\mathbf{e}})_V. \quad (28)$$

La ecuación (26) puede escribirse en forma matricial:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \sigma^e \\ \sigma^u \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{I} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{I} \\ j_{12}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{I} & j_{23}\mathbf{I} \\ \text{symm} & j_{23}\mathbf{I} & j_{33}\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^\sigma \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e}^u \end{Bmatrix} dV. \quad (29)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

donde  $\mathbf{I}$  denota la matriz identidad de orden 6. La matriz simétrica† de coeficientes

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (30)$$

caracteriza completamente (26) y por lo tanto, una vez que el potencial de esfuerzos  $P$  se selecciona, el funcional (24). Esta matriz se llama *funcional-generadora*.

Reemplazando (27) en (29),  $U$  puede escribirse en término de los tres campos independientes:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{E}^{-1} & j_{12}\mathbf{I} & j_{13}\mathbf{D} \\ j_{12}\mathbf{I} & j_{22}\mathbf{E} & j_{23}\mathbf{ED} \\ j_{13}\mathbf{D}^T & j_{23}\mathbf{D}^T\mathbf{E} & j_{33}\mathbf{D}^T\mathbf{ED} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} dV. \quad (31)$$

Usando (31) la primera variación de  $U$  se escribe

$$\delta U = (\Delta \mathbf{e}, \delta \tilde{\sigma})_V + (\Delta \sigma, \delta \tilde{\mathbf{e}})_V - (\text{div } \sigma', \delta \tilde{\mathbf{u}})_V + [\sigma'_n, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_S, \quad (32)$$

† Para justificar la simetría de  $\mathbf{J}$  obsérvese, por ejemplo, que  $j_{13}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u)_V = \frac{1}{2}j_{13}(\tilde{\sigma}, \mathbf{e}^u)_V + \frac{1}{2}j_{13}(\mathbf{e}^\sigma, \sigma^u)_V$ , etc..



donde

$$\Delta \mathbf{e} = j_{11} \mathbf{e}^\sigma + j_{12} \tilde{\mathbf{e}} + j_{13} \mathbf{e}^u, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = j_{12} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + j_{22} \boldsymbol{\sigma}^e + j_{23} \boldsymbol{\sigma}^u, \quad \boldsymbol{\sigma}' = j_{13} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + j_{23} \boldsymbol{\sigma}^e + j_{33} \boldsymbol{\sigma}^u. \quad (33)$$

El último término en (33) se combina con las contribuciones de la variación del potencial de esfuerzos. Por ejemplo, si  $P$  es el potencial de esfuerzos convencional (25), la variación completa de  $\Pi^c = U - P^c$  es

$$\delta \Pi^c = (\Delta \mathbf{e}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}})_V + (\Delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \tilde{\mathbf{e}})_V - (\text{div } \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{b}, \delta \tilde{\mathbf{u}})_V + [\boldsymbol{\sigma}'_n - \hat{\mathbf{t}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} - [\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_n]_{S_d}. \quad (34)$$

El uso de  $P^d$  o  $P^t$  no modifica los términos volumétricos. Por lo tanto, las ecuaciones de Euler provenientes de la variación de los términos volumétricos

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (35)$$

son independientes del potencial de esfuerzos. Para obtener consistencia de las ecuaciones de Euler con las ecuaciones de campo de elasticidad clásica se debe verificar  $\Delta \mathbf{e} = \mathbf{0}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  y  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}$  cuando los campos de tensión y deformaciones asumidos se reducen a los exactos. Esta identificación da

$$j_{11} + j_{12} + j_{13} = 0, \quad j_{12} + j_{22} + j_{23} = 0, \quad j_{13} + j_{23} + j_{33} = 1. \quad (36)$$

Teniendo en cuenta estas condiciones de vínculo, el máximo número de parámetros libres que definen las componentes de la matriz  $\mathbf{J}$  es tres. La especialización de estos funcionales a formas convencionales y parametrizadas ha sido estudiada por Felippa y Militello<sup>5-7</sup>.

Como  $\mathbf{E}^{-1}$  aparece en (31), este desarrollo es válido solamente para elasticidad compresible. Felippa<sup>8,9</sup> ha presentado extensiones de este principio variacional que abarcan incompresibilidad.

## ENERGIA DE DEFORMACION GENERALIZADA PARA ELASTICIDAD MICROPOLAR

El funcional para un material elástico micropolar tiene una estructura similar a (24):

$$\Pi_m = U_m - P_m, \quad (37)$$

donde  $U_m$  ahora depende en  $\tilde{\mathbf{s}}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ , y  $P_m$  puede ser  $P_m^c$ ,  $P_m^d$  o  $P_m^t$ . Se postula la generalización sigiente de  $U$  a  $U_m$ :

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\sigma}^e \\ \boldsymbol{\sigma}^u \\ \tilde{\mathbf{s}} \\ \mathbf{s}^\phi \\ \mathbf{s}^{u\phi} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11} \mathbf{I}_6 & j_{12} \mathbf{I}_6 & j_{13} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ j_{12} \mathbf{I}_6 & j_{22} \mathbf{I}_6 & j_{23} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ j_{13} \mathbf{I}_6 & j_{23} \mathbf{I}_6 & j_{33} \mathbf{I}_6 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & j_{44} \mathbf{I}_3 & j_{45} \mathbf{I}_3 & j_{46} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & j_{45} \mathbf{I}_3 & j_{55} \mathbf{I}_3 & j_{56} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & j_{46} \mathbf{I}_3 & j_{56} \mathbf{I}_3 & j_{56} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}^\sigma \\ \tilde{\mathbf{e}} \\ \mathbf{e}^u \\ \boldsymbol{\phi}^s \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}} \\ \boldsymbol{\phi}^{u\theta} \end{Bmatrix} dV, \quad (38)$$

donde  $\mathbf{I}_6$  y  $\mathbf{I}_3$  denotan las matrices de identidad de orden 6 y 3, respectivamente, y donde los nuevos campos derivados son

$$\phi^s = \mathbf{G}^{-1}\tilde{s}, \quad s^\phi = \mathbf{G}\tilde{\phi}, \quad \phi^{u\theta} = \mathbf{R}\tilde{u} - \tilde{\theta}, \quad s^{u\theta} = \mathbf{G}\phi^{u\theta} = \mathbf{G}(\mathbf{R}\tilde{u} - \tilde{\theta}). \quad (39)$$

La estructura de bloque desacoplada de la matriz núcleo de (38) resulta de la ortogonalidad (14) de productos internos entre tensores simétricos y antisimétricos. La simetría de los coeficientes  $j$  es una suposición que queda por verificarse.

Substituyendo (39) y (27) en (38)  $U_m$  se expresa en término de los seis campos independientes  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{e}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{s}$ ,  $\tilde{\phi}$  y  $\tilde{\theta}$ :

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{e} \\ \tilde{u} \\ \tilde{s} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} j_{11}\mathbf{E}^{-1} & j_{12}\mathbf{I}_6 & j_{13}\mathbf{D} & 0 & 0 & 0 \\ j_{12}\mathbf{I}_6 & j_{22}\mathbf{E} & j_{23}\mathbf{ED} & 0 & 0 & 0 \\ j_{13}\mathbf{D}^T & j_{23}\mathbf{D}^T\mathbf{E} & j_{33}\mathbf{D}^T\mathbf{ED} & j_{46}\mathbf{R}^T & j_{56}\mathbf{R}^T\mathbf{G} & -j_{66}\mathbf{R}^T\mathbf{G} \\ & & +j_{66}\mathbf{R}^T\mathbf{G}\mathbf{R} & & & \\ 0 & 0 & j_{46}\mathbf{R} & j_{44}\mathbf{G}^{-1} & j_{45}\mathbf{I}_3 & j_{46}\mathbf{I}_3 \\ 0 & 0 & j_{56}\mathbf{G}\mathbf{R} & j_{45}\mathbf{I}_3 & j_{55}\mathbf{G} & -j_{56}\mathbf{G} \\ 0 & 0 & -j_{66}\mathbf{G}\mathbf{R} & -j_{46}\mathbf{I}_3 & -j_{56}\mathbf{G} & j_{66}\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{e} \\ \tilde{u} \\ \tilde{s} \\ \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \end{Bmatrix} dV. \quad (40)$$

La matriz de núcleo en esta forma cuadrática debe ser simétrica, lo que justifica la suposición de simetría de los coeficientes en (38). Respecto al potencial de esfuerzos, la forma convencional () se transforma en

$$P_m^c = (\mathbf{b}, \tilde{u})_V + \frac{1}{2}(\mathbf{c}, \tilde{\theta})_V + [\tilde{u} - \hat{\mathbf{d}}, \tau_n]_{S_d} + [\hat{\mathbf{t}}, \tilde{u}]_{S_t} = P^c + \frac{1}{2}(\mathbf{c}, \theta)_V + (\tilde{u} - \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{s}_n)_{S_d}. \quad (41)$$

Similarmente los potenciales de esfuerzos generalizados  $P_m^d$  y  $P_m^t$  se obtienen añadiendo  $P^d$  y  $P^t$ , respectivamente, con  $\frac{1}{2}(\mathbf{c}, \tilde{\theta})_V + (\tilde{u} - \hat{\mathbf{d}}, \mathbf{s})_{S_d} \cdot \dagger$

La primera variación de  $U_m$  es

$$\delta U_m = (\Delta \mathbf{e}, \delta \tilde{\sigma})_V + (\Delta \sigma, \delta \tilde{e})_V - (\mathbf{D}^T \sigma' + \mathbf{R}^T \mathbf{s}', \delta \tilde{u})_V + (\Delta \phi, \delta \tilde{s})_V + (\Delta \mathbf{s}, \delta \tilde{\phi})_V + (\mathbf{s}', \delta \tilde{\theta})_V + [\sigma'_n + \mathbf{s}'_n, \delta \tilde{u}_n]_{S_d}. \quad (42)$$

$\dagger$  El factor  $1/2$  en el término con  $\mathbf{c}$  es necesario para compensar por la presencia del factor 2 en la definición (10) del vector de microrrotaciones  $\theta$ .

donde  $\Delta \mathbf{e}$ ,  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son los mismos que en (33),

$$\Delta \boldsymbol{\phi} = j_{44} \boldsymbol{\phi}^s + j_{45} \tilde{\boldsymbol{\phi}} + j_{46} \boldsymbol{\phi}^{u\theta}, \quad \Delta \mathbf{s} = j_{45} \tilde{\mathbf{s}} + j_{55} \mathbf{s}^\phi + j_{56} \mathbf{s}^{u\theta}, \quad \mathbf{s}' = j_{46} \tilde{\mathbf{s}} + j_{56} \mathbf{s}^\phi + j_{66} \mathbf{s}^{u\theta}. \quad (43)$$

Nótese que  $(\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{R}^T \mathbf{s}') = \text{div } \boldsymbol{\sigma}' + \text{div } \mathbf{s}' = \text{div } \boldsymbol{\tau}'$ , donde  $\boldsymbol{\tau}' = {}^* \boldsymbol{\sigma}' + {}^* \mathbf{s}'$ . La primera variación de  $\Pi_m = U_m - P_m^c$  es

$$\begin{aligned} \delta \Pi_m = & (\Delta \mathbf{e}, \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}})_V + (\Delta \boldsymbol{\sigma}, \delta \tilde{\mathbf{e}})_V - (\text{div } \boldsymbol{\tau}', \delta \tilde{\mathbf{u}})_V + (\Delta \boldsymbol{\phi}, \delta \tilde{\mathbf{s}})_V \\ & + (\Delta \mathbf{s}, \delta \tilde{\boldsymbol{\phi}})_V + \frac{1}{2} (2\mathbf{s}' + \mathbf{c}, \delta \tilde{\boldsymbol{\theta}})_V + [\boldsymbol{\tau}'_n \delta \tilde{\mathbf{u}}]_{S_t} + [\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{d}}, \delta \tilde{\boldsymbol{\tau}}_n]_{S_d}. \end{aligned} \quad (44)$$

Usando el mismo argumento que en el caso de elasticidad clásica, se deduce que la consistencia con las ecuaciones de campo requiere, además de (36), que

$$j_{44} + j_{45} + j_{46} = 0, \quad j_{45} + j_{55} + j_{56} = 0, \quad j_{46} + j_{56} + j_{66} = 1. \quad (45)$$

En consecuencia, el funcional parametrizado de elasticidad micropolar

$$\Pi_m = U_m(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{e}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{s}}, \tilde{\boldsymbol{\phi}}, \tilde{\boldsymbol{\theta}}) - P_m, \quad (46)$$

depende de  $12 - 6 = 6$  parámetros libres a través de  $U_m$ . Casos específicos de (46) están definidos por la matriz funcional-generadora

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{44} & j_{45} & j_{46} \\ 0 & 0 & 0 & j_{45} & j_{55} & j_{56} \\ 0 & 0 & 0 & j_{46} & j_{56} & j_{66} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

sujeta a las seis condiciones de vínculo (36) y (45). Los bloques  $3 \times 3$  no nulos en  $\mathbf{J}_m$  caracterizan los pesos de los campos simétricos y antisimétricos, respectivamente, y se puede “mezclar o parejar.” Por ejemplo,

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

representa la selección del principio de Hu-Washizu para los campos simétricos y antisimétricos.

Los principios variacionales de Reissner<sup>10</sup> y Hughes-Brezzi<sup>11</sup> serán estudiados en la sección siguiente desde el punto de vista proporcionado por los desarrollos precedentes.

## FUNCIONALES DE CUATRO CAMPOS CON ROTACIONES INDEPENDIENTES

### Los Funcionales de Reissner

En 1965 Reissner<sup>10</sup> propuso un funcional de tipo Hellinger-Reissner para elasticidad clásica ( $c = 0$ ) en el que  $u$ ,  $\tau$  y  $\theta$  se consideran campos independientes. En este funcional el requerimiento de simetría puntual de tensiones  $s = 0$  se relaja a una condición débil con  $\theta$  en el papel de multiplicador de Lagrange. En la notación de este artículo el funcional, aquí llamado  $\Pi_{R1} = U_{R1} - P_R^c$ , se escribe

$$U_{R1} = -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, E^{-1}\tilde{\sigma})_V + (\tilde{\tau}, \nabla \tilde{u} - \tilde{\theta})_V, \quad P_R^c = P^c + [\tilde{u} - \hat{d}, \tilde{s}_n]_{S_d}, \quad (49)$$

donde  $\nabla u$  es el gradiente del vector de desplazamientos. Expandiendo los productos escalares, observando que  $\tau^T(\nabla u - \theta) = \tau^T \gamma^{u,\phi} = (*\sigma + *s)^T(*e^u + *\phi^{u,\phi})$ , y usando (14) se obtiene

$$\begin{aligned} U_{R1} &= -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, e^\sigma)_V + (\tilde{\sigma}, e^u)_V + (\tilde{s}, \phi^{u\theta})_V \\ &= -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, e^\sigma)_V + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, e^u)_V + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^u, \tilde{e})_V + \frac{1}{2}(\tilde{s}, \phi^{u\theta})_V + \frac{1}{2}(s^{u\theta}, \tilde{\phi})_V. \end{aligned} \quad (50)$$

Esto corresponde a tomar

$$J_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Es evidente que la primera condición de consistencia en (45), es decir  $j_{44} + j_{45} + j_{46} = 0$ , no se verifica. Por lo tanto  $\Pi_{R1}$  no es un funcional válido para elasticidad micropolar. Sin embargo, la inspección de (51) revela que las condiciones (45) pueden verificarse simplemente cambiando  $j_{44}$  a  $-1$ , y ésta es precisamente la regularización de Hughes-Brezzi discutida en la subsección siguiente.

Reissner también propuso otro funcional  $\Pi_{R2} = U_{R2} - P_R^c$  de tipo Hu-Washizu, en el que

$$\begin{aligned} U_{R2} &= \frac{1}{2}(\tilde{e}, E\tilde{e})_V + (\tilde{\sigma}, e^u - \tilde{\gamma})_V + (\tilde{s}, \phi^{u\theta} - \tilde{\phi})_V \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^e, \tilde{e}) + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, e^u - \tilde{e})_V + \frac{1}{2}(\sigma^u - \sigma^e, e^\sigma)_V + \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tilde{s}, \phi^{u\theta} - \tilde{\phi})_V + \frac{1}{2}(s^{u\theta} - \tilde{s}^\phi, \phi^s)_V, \end{aligned} \quad (52)$$

que corresponde a la matriz  $J_m$  de (48), con la excepción que  $j_{55} = 0$ . Esto viola la segunda condición de consistencia en (45). En consecuencia el segundo funcional es también inconsistente con elasticidad micropolar, pero puede corregirse reemplazando  $j_{55}$  por 1.

## Los Funcionales de Hughes-Brezzi

En 1989 Hughes y Brezzi<sup>11</sup> investigaron la aplicación de los funcionales de Reissner a construir elementos finitos con grados de libertad "taladros" en elasticidad clásica. El análisis matemático muestra que el primer funcional de Reissner conduciría a aproximaciones discretas *inestables*. La causa física de esta inestabilidad es que desviaciones de simetría en las tensiones no absorben energía. Para evitar esta dificultad, Hughes y Brezzi propusieron estabilizar  $U_{R1}$  con la adición de un término de penalidad de la forma

$$-\frac{1}{2\bar{\kappa}}(\tilde{s}, \tilde{s})_V, \quad (53)$$

donde  $\bar{\kappa} > 0$  es un pseudo-módulo con dimensiones de tensión.<sup>¶</sup> Aunque  $\bar{\kappa}$  juega el mismo papel que  $\kappa$  en la teoría micropolar, para la aplicación a elasticidad clásica es un número *ficticio*, que deberá elegirse a través de experimentos numéricos. El término de penalidad (53) se puede incluir en el desarrollo presente tomando  $G = \bar{\kappa}I_3$ , lo que permite escribir (53) como  $-\frac{1}{2}(\tilde{s}, \phi^s)_V$ . Sumando esto a  $U_{R1}$  da el primer funcional de Hughes-Brezzi:

$$\begin{aligned} U_{HB1} &= -\frac{1}{2}(\tilde{\tau}, C^{-1}\tilde{\tau})_V + (\tilde{\tau}, \nabla \tilde{u} - \tilde{\theta})_V \\ &= -\frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, e^s)_V - \frac{1}{2}(\tilde{s}, \phi^s)_V + \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}, e^u)_V + \frac{1}{2}(\sigma^u, \tilde{e})_V + \frac{1}{2}(\tilde{s}, \phi^{u\theta})_V + \frac{1}{2}(s^{u\theta}, \tilde{\phi})_V. \end{aligned} \quad (54)$$

Esta forma encaja en (38) si

$$J_m = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

cuyos coeficientes satisfacen (36) y (45). Se observa que el proceso de estabilización tuvo también el efecto adicional de hacer el funcional consistente con elasticidad micropolar.

Para el segundo funcional de Reissner, el término de estabilización añadido a  $U_{R2}$  es  $\frac{1}{2}(s^\phi, \tilde{\phi})_V$ , que efectivamente transforma el primer término en (52) de  $(\tilde{e}, E\tilde{e})_V$  a  $(\tilde{\gamma}, C\tilde{\gamma})_V$ . La matriz generadora resultante  $J_m$  es (48).

La generalización obvia de esta regla de "bloque repetido" es

$$J_m = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 0 & 0 & 0 \\ j_{12} & j_{22} & j_{23} & 0 & 0 & 0 \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ 0 & 0 & 0 & j_{12} & j_{22} & j_{23} \\ 0 & 0 & 0 & j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

<sup>¶</sup> En el artículo de Hughes-Brezzi este módulo se llama  $\gamma$ , un símbolo reservado aquí para deformaciones totales.

con coeficientes que satisfacen (36). Esta familia de tres parámetros libres permite la  *fusión*  de partes simétricas y antisimétricas de tensiones y deformaciones para obtener tensiones y deformaciones totales. Los funcionales resultantes  $\Pi(\tilde{\tau}, \tilde{\gamma}, \tilde{u}, \tilde{\theta})$  pueden interpretarse como si tuvieran cuatro campos independientes en vez de seis. Nótese, sin embargo, que (50) no da la forma funcional más general pues es un caso especial de (47).

## CONCLUSIONES

El funcional  $\Pi_m = U_m - P_m$  extiende el funcional parametrizado  $\Pi = U - P$  de hiperelasticidad clásica con la inclusión de tres campos independientes adicionales: tensiones antisimétricas, deformaciones antisimétricas, y microrrotaciones. La extensión se ha efectuado en el marco de elasticidad micropolar.

Otra aplicación de este funcional es la construcción de elementos finitos para elasticidad clásica en los que el campo de rotaciones  $\theta$  varía independientemente de los desplazamientos. El objetivo es relajar el requisito puntual de simetría de tensiones en favor de una condición débil. Los funcionales de Hughes-Brezzi han sido propuestas con este objetivo. Un elemento finito de membrana con grados de libertad "taladro" basado en estos funcionales ha sido construido recientemente por Ibrahimbegovic<sup>12</sup>. El estudio de la sección anterior indica que los funcionales de Hughes-Brezzi encajan en el marco de elasticidad micropolar si el módulo ficticio  $\bar{\kappa}$  se identifica con el módulo micropolar  $\kappa$ .

Los funcionales de Hughes-Brezzi pueden ser fácilmente generalizados a un funcional con tres parámetros libres definido por (56), en el que pesos idénticos se aplican a los campos simétricos y antisimétricos. Sin embargo, esta familia es un subespacio del funcional general con seis parámetros libres (46) caracterizado por la matriz  $\mathbf{J}_m$  de (47). La forma general permite que esos pesos sean escogidos separadamente.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por NASA Lewis Research Center a través de Grant NAG 3-934.

## REFERENCIAS

1. W. Novacki, "Theory of Micropolar Elasticity", Udine, Italy, (1970).
2. K. Berglund, "Special micromodels for micropolar continua", *Continuum Models of Discrete Systems*, University of Waterloo Press, pp. 703-718, (1977).
3. C. A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. Mixed functionals", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 79-88, (1989).
4. C. A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: II. Hybrid functionals and the free formulation", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol 5, pp. 89-98, (1989).

5. C. A. Felippa y C. Militello, "Developments in variational methods for high-performance plate and shell elements", *Analytical and Computational Methods for Shells*, CAD Vol. 3, A. K. Noor, T. Belytschko y J. C. Simo (eds.), American Society of Mechanical Engineers, ASME, New York, pp. 191-216, (1989).
6. C. A. Felippa y C. Militello, "The variational formulation of high-performance finite elements: parametrized variational principles", *Computers & Structures*, Vol. 36, pp. 1-11 (1990).
7. C. A. Felippa y C. Militello, "Principios variacionales parametrizados en elasticidad lineal", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 6, pp. 333-342, (1990).
8. C. A. Felippa, "Principios variacionales parametrizados que abarcan elasticidad compresible e incompresible", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 7, pp. 347-361, (1991).
9. C. A. Felippa, "Parametrized variational principles encompassing compressible and incompressible elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 29, pp. 57-68, (1991).
10. E. Reissner, "A note on variational theorems of elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, pp. 93-95, (1965).
11. T. J. R. Hughes y F. Brezzi, "On drilling degrees of freedom", *Computer Methods for Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 72, pp. 105-121, (1989).
12. A. Ibrahimbegovic, "A novel membrane finite element with an enhanced displacement interpolation", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, pp. 167-179, (1990).